Вступительный экзамен в Вечернюю математическую школу
при факультете ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
(24 сентября 2022 года)

8-9 классы

1. **По прямолинейной дороге скачут Атос (со скоростью 5 лье в час) и Арамис (со скоростью 7 лье в час). Сейчас расстояние между мушкетёрами равно 13 лье. Какое расстояние будет между ними через час? Рассмотрите все варианты.**

Ответ: 1, 11, 15 или 25 лье.
Решение. При решении этой задачи самое сложное это понять, что возможны четыре варианта направления скоростей мушкетёров.

2. **1755 год – год основания Московского университета. Существует ли число,**
   а) кратное 2022 и имеющее в десятичной записи сумму цифр, равную 1755,
   б) кратное 1755 и имеющее в десятичной записи сумму цифр, равную 2022?

Ответ: а) Да. б) Нет.
Решение. Заметим, что $1755 = 3\times585 = 9\times195$, $2022 = 2\times3\times337$.
а) Такое число существует. Так как сумма цифр числа 10110 равна 3, а само число 10110 кратно 2022, то число 1011010110…10110 (585 блоков «10110») кратно 2022 и имеет сумму цифр, равную 1755.
б) Такого числа не существует. Допустим, некоторое число A кратно 1755 и имеет в десятичной записи сумму цифр, равную 2022. Тогда A кратно 9, и по свойству делимости на 9 сумма цифр числа A кратна 9, что не так, ибо 2022 не делится на 9 нацело. Получили противоречие, числа A не существует.

3. **На столе лежат 2022 монеты. Кот Базилио и Лиса Алиса по очереди берут со стола по несколько монет – одну, сорок одну или пятнадцать. Первый ход делает Кот Базилио. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю монету. Кто победит при правильной игре (каждый хочет выиграть, и выбирает для этого лучшую стратегию)? Ответ обосновать.**

Ответ: Лиса Алиса.
Решение. Отметим, что пока монеты на столе остались, у игроков всегда есть ход (одну монету можно взять всегда). Легко видеть, что, поскольку числа 1, 41 и 15 нечётные, чётность числа оставшихся на столе монет с каждым ходом меняется на противоположную. Вначале на столе лежит чётное число монет (2022). Значит, 0 монет на столе останется после хода Лисы Алисы, то есть она выигрывает при любом развитии игры.

4. **Размеры прямоугольника – целые числа. Если длину увеличить на 2, а ширину уменьшить на 2, то площадь уменьшится на 10. Как изменится площадь *исходного* прямоугольника, если, наоборот, длину уменьшить на 2, а ширину увеличить на 2? Ответ обосновать.**

Ответ: увеличится на 2.

Решение. Пусть прямоугольник имеет размеры k×n. Тогда $(k+2)(n-2)-kn=-10$, откуда $k-n=3$. Искомая величина равна $(k-2)(n+2)-kn=2(k-n)-4=6-4=2$.

5. **Некоторой выпуклой фигурой Ф нельзя полностью накрыть полукруг радиуса R. Незнайка утверждает, что он двумя одинаковыми фигурами Ф может полностью накрыть круг радиуса R. Может ли Незнайка быть прав? Ответ обосновать.**

Ответ: может.
Решение. Впишем в круг радиуса R квадрат. Его граница разбивает круг на 5 областей – квадрат и 4 одинаковых круговых сегмента. Пусть фигура Ф состоит из этого квадрата и двух противолежащих сегментов круга. Очевидно, фигурой Ф накрыть никакой полукруг радиуса R нельзя. С другой стороны, двумя такими фигурами (одна из них получается из другой поворотом на угол 90^o относительно центра) накрыть весь круг можно.

6. **ABCDEFG20222022…2022 (фрагмент «2022» встречается ровно 100 раз) является записью некоторого числа в 17-ричной системе счисления. Какой остаток это число даёт при делении на 8? Ответ обосновать.**

Ответ: 3.
Решение. Поскольку $17=2\cdot 8+1$, любая степень числа 17 при делении на 8 имеет остаток 1. Значит, число $ABCDEFG20222022\ldots2022_{17}$ при делении на 8 даёт такой же остаток, что и сумма его цифр, которая равна 691.

7. **В каждой клетке таблицы 8×8 стоит знак «+» или «–». Разрешается, выделив в таблице любой квадрат 3×3 или 4×4, изменить знаки во всех клетках этого квадрата на противоположные. Всегда ли с помощью таких операций можно добиться того, чтобы все знаки, стоящие в таблице, стали знаками «+»? Ответ обосновать.**

Ответ: не всегда.
Решение. Заметим, что все операции перестановочны, и что применить операцию к одному квадрату дважды равносильно тому, чтобы не применять её вовсе. Кроме того, исходная задача сводится к вопросу, любую ли расстановку «плюсов» и «минусов» можно получить из таблицы из всех «плюсов». Покажем, что не любую.
Всего существует 2^{64} расстановок «плюсов» и «минусов». С другой стороны, каждый квадрат 3×3 однозначно задаётся своим левым верхним углом, поэтому всего 36 таких квадратов, а значит, имеется 2^{36} способов выбрать подмножество из множества всех квадратов 3×3 в таблице. Аналогично, имеется 2^{25} способов выбрать в таблице подмножество из множества всех квадратов 4×4. Поскольку $2^{36}\cdot 2^{25}=2^{61}<2^{64}$, все расстановки «плюсов» и «минусов» получить невозможно.

8. **На кафедре 21 преподаватель. Известно, что среди любых трёх преподавателей хотя бы двое работали в одной экзаменационной комиссии. Докажите, что найдётся преподаватель, работавший в одной экзаменационной комиссии не менее чем с десятью другими (возможно, в разное время).**

Решение. Переформулируем задачу на языке теории графов:

В графе 21 вершина. Известно, что среди любых трёх вершин обязательно найдутся две смежные (соединённые ребром). Доказать, что в графе найдётся вершина степени не менее 10.

Докажем это утверждение.

Первый способ. Предположим противное. Пусть степень каждой вершины графа не превышает 9. Возьмём любую вершину u. Из неё выходят не более 9 рёбер, а остальных вершин 20. Значит, найдётся вершина v, не смежная с u. Количество вершин, смежных хотя бы с одной из этих двух вершин, не более чем 9+9=18. А всего вершин 21. Значит, найдётся вершина w, отличная от вершину u и v и не смежная с ними (поскольку 21 > 2 + 18). В итоге среди трёх вершин u, v и v нет смежных, что противоречит условию задачи.

Второй способ. Возьмём любую вершину v. Если её степень больше 9, то она искомая. Если нет, то найдётся множество М из 11 вершин, с которыми вершина v не смежна. Очевидно, в множестве М все вершины попарно смежны (действительно, если вершины a и b из М не смежны, то среди трёх вершин v, a и b исходного графа нет смежных, что противоречит условию). Значит, каждая вершина из М имеет степень как минимум 10. Утверждение доказано.

Вступительный экзамен в Вечернюю математическую школу
при факультете ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
(24 сентября 2022 года)

10 класс

1. **Может ли произведение двух соседних чётных чисел равняться произведению двух последовательных натуральных чисел? Ответ обосновать.**

Ответ: не может.
Решение. Пусть $2n(2n+2)=k(k+1)$. Тогда, прибавив 1 к обеим частям, получим $(2n+1)^2=k^2+k+1$, чего не может быть при натуральных k, поскольку $k^2<k^2+k+1<(k+1)^2$, а число, которое лежит между двух последовательных квадратов, не может быть квадратом целого числа.

2. **Разложите на множители выражение** $3xy-2x^2-y^2-y+2$.

Решение. Легко проверить, что $3xy-2x^2-y^2-y+2=(x-y+1)(y-2x+2)$.
Замечание. Искомое разложение на множители можно получить либо группировкой, либо методом неопределённых коэффициентов, либо с помощью теоремы о разложении квадратного трёхчлена на множители (рассматривая данное выражение как квадратный трёхчлен, например, относительно переменной y).

3. **Пусть $n!$ = 1×2×3×…×n. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится (нацело) на 5! и десятичная запись которого состоит только из цифр «2» и «0». Ответ обосновать.**

Ответ: 22200.
Решение. Обозначим искомое число через N. Поскольку $5! = 120 = 2^3 \times 3 \times 5$, то N делится на 8. Значит, число, которое образуют три последние цифры числа N, делится на 8. Но N состоит только из цифр «2» и «0». Стало быть, N оканчивается на 000 или на 200. При этом N будет обязательно делиться на 5, а чтобы оно делилось на 3, количество двоек в записи числа должно быть кратно 3. Наименьшее число, которое удовлетворяет всем этим условиям, равно 22200.

4. **В шахматном турнире, в котором каждый участник должен встречаться с каждым ровно один раз, в какой-то момент два шахматиста заболели и выбыли из турнира. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовали в турнире? Ответ обосновать.**

Ответ: 15 или 16.
Решение. Пусть в турнире участвовало n шахматистов. Поскольку всего было запланировано $\frac{n(n-1)}{2}$ встреч, имеем $n(n-1) \geq 188$, откуда $n \geq 15$. С другой стороны, оставшиеся $n-2$ шахматиста между собой сыграли все партии. Поэтому $(n-2)(n-3) \leq 188$, поэтому $n \leq 16$. Легко проверить, что оба варианта n = 15 и n = 16 подходят.

5. **Существует ли такое целое число *n*, что $n^2 - 3n - 2022$ является квадратом натурального числа? Ответ обосновать.**

Ответ: существует.
Решение. Очевидно, при $n = -674$ данное выражение равно квадрату числа 674.

6. **Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{2x^2+6x+17}+\sqrt{2x^2-2x+13}$ при всех действительных *x*.**

Ответ: $\sqrt{58}$.
Решение. Выделяя полные квадраты, исходное выражение легко можно преобразовать к виду $\sqrt{(x-1)^2+(x+4)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(x-3)^2}=d.$ Теперь видно, что значение выражения d представляет собой сумму длин отрезков AM и MB, концы которых имеют на декартовой плоскости координаты A (1; -4), B (-2; 3), M $(x; x)$. Заметим, что точка M лежит на прямой l, заданной уравнением $y = x$, а точки A и B лежат на плоскости по разные стороны от этой прямой. Стало быть, минимум выражения d соответствует случаю, когда M есть точка пересечения прямых AB и l, и по формуле расстояния между точками находим:
$$\min_{x\in R} d(x) = \min_{M\in l}\left(AM+MB\right) = AB = \sqrt{(-2-1)^2+(3-(-4))^2} = \sqrt{58}.$$

7. **Имеется множество всех 16-ричных наборов длины три – от 000 до FFF. Назовём два набора соседними, если они отличаются только в одной позиции (например, наборы 5A2 и 512 – соседние, а 5A2 и 52A – нет). Какое наибольшее количество попарно не соседних наборов можно выбрать из этого множества? Ответ обосновать.**

Ответ: 256.

Решение. Разобьём все указанные наборы на 256 групп. В первую группу поместим 16 наборов, начинающихся на **00** (от **000** до **00F**), во вторую – 16 чисел, начинающихся на **01** (от **010** до **01F**), …, в последнюю – 16 чисел, начинающихся на **FF** (от **FF0** до **FFF**). Поскольку в каждой группе наборы попарно соседние, то всего попарно не соседних наборов из данного большого множества можно выбрать не более 256 штук.
Покажем теперь, как выбрать по одному набору из каждой группы так, чтобы выбранные наборы были попарно не смежными. Заметим, что в каждой группе у наборов суммы 16-ричных цифр идут последовательно. Значит, среди них обязательно найдётся та, которая делится на 16. Вот соответствующий набор и возьмём (в первой группе это набор **000**, во второй – набор **01F**, …, в последней – **FF2**). Очевидно, различные наборы с равной суммой цифр не могут отличаться только в одной цифре, то есть они не могут быть соседними. Значит, выбранные 256 наборов удовлетворяют условию задачи.

8. **Для всех** α **и** β **докажите неравенство** $\sin\alpha + (\sin\beta - \cos\beta)\cos\alpha \le \sqrt{3}.$

Решение. Заметим, что при всех *A, B* и *x* выполнено двойное неравенство $-\sqrt{A^2+B^2} \le A\sin x + B\cos x \le \sqrt{A^2+B^2}$, откуда следует, что $-\sqrt{2} \le (\sin\beta - \cos\beta) \le \sqrt{2}$ и $\sin\alpha + (\sin\beta - \cos\beta)\cos\alpha \le \sqrt{1+(\sin\beta-\cos\beta)^2} \le \sqrt{1+2} = \sqrt{3}.$

Пункты задач (номер 2 в варианте для 8-9 классов) оценивались как **самостоятельные задачи**.

Ваши комментарии к задачам и их решениям, а также отзывы, замечания и пожелания, касающиеся работы Вечерней математической школы, просьба отправлять на электронную почту **vmsh@cs.msu.ru** .

С наилучшими пожеланиями, дирекция ВМШ