**Вступительный экзамен в Вечернюю математическую школу при факультете ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова (24 сентября 2022 года)**

**8-9 классы**

1. По прямолинейной дороге скачут Атос (со скоростью 5 лье в час) и Арамис (со скоростью 7 лье в час). Сейчас расстояние между мушкетёрами равно 13 лье. Какое расстояние будет между ними через час? Рассмотрите все варианты.

2. 1755 год – год основания Московского университета. Существует ли число,
   а) кратное 2022 и имеющее в десятичной записи сумму цифр, равную 1755,
   б) кратное 1755 и имеющее в десятичной записи сумму цифр, равную 2022?

3. На столе лежат 2022 монеты. Кот Базилио и Лиса Алиса по очереди берут со стола по несколько монет – одну, сорок одну или пятнадцать. Первый ход делает Кот Базилио. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю монету. Кто победит при правильной игре (каждый хочет выиграть, и выбирает для этого лучшую стратегию)? Ответ обосновать.

4. Размеры прямоугольника – целые числа. Если длину увеличить на 2, а ширину уменьшить на 2, то площадь уменьшится на 10. Как изменится площадь *исходного* прямоугольника, если, наоборот, длину уменьшить на 2, а ширину увеличить на 2? Ответ обосновать.

5. Некоторой выпуклой фигурой Ф нельзя полностью накрыть полукруг радиуса R. Незнайка утверждает, что он двумя одинаковыми фигурами Ф может полностью накрыть круг радиуса R. Может ли Незнайка быть прав? Ответ обосновать.

6. ABCDEFG20222022…2022 (фрагмент «2022» встречается ровно 100 раз) является записью некоторого числа в 17-ричной системе счисления. Какой остаток это число даёт при делении на 8? Ответ обосновать.

7. В каждой клетке таблицы 8×8 стоит знак «+» или «–». Разрешается, выделив в таблице любой квадрат 3×3 или 4×4, изменить знаки во всех клетках этого квадрата на противоположные. Всегда ли с помощью таких операций можно добиться того, чтобы все знаки, стоящие в таблице, стали знаками «+»? Ответ обосновать.

8. На кафедре 21 преподаватель. Известно, что среди любых трёх преподавателей хотя бы двое работали в одной экзаменационной комиссии. Докажите, что найдётся преподаватель, работавший в одной экзаменационной комиссии не менее чем с десятью другими (возможно, в разное время).

**Вступительный экзамен в Вечернюю математическую школу при факультете ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова (24 сентября 2022 года)**

**10 класс**

1. Может ли произведение двух соседних чётных чисел равняться произведению двух последовательных натуральных чисел? Ответ обосновать.

2. Разложите на множители выражение $3xy-2x^2-y^2-y+2$.

3. Пусть $n! = 1\times2\times3\times\ldots\times n$. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится (нацело) на 5! и десятичная запись которого состоит только из цифр «2» и «0». Ответ обосновать.

4. В шахматном турнире, в котором каждый участник должен встречаться с каждым ровно один раз, в какой-то момент два шахматиста заболели и выбыли из турнира. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовали в турнире? Ответ обосновать.

5. Существует ли такое целое число $n$, что $n^2-3n-2022$ является квадратом натурального числа? Ответ обосновать.

6. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{2x^2+6x+17}+\sqrt{2x^2-2x+13}$ при всех действительных $x$.

7. Имеется множество всех 16-ричных наборов длины три – от 000 до FFF. Назовём два набора соседними, если они отличаются только в одной позиции (например, наборы 5A2 и 512 – соседние, а 5A2 и 52A – нет). Какое наибольшее количество попарно не соседних наборов можно выбрать из этого множества? Ответ обосновать.

8. Для всех $\alpha$ и $\beta$ докажите неравенство $\sin\alpha+(\sin\beta-\cos\beta)\cos\alpha\le\sqrt{3}$.